Μαθημα 20ο 18/12/2017
Διαφ. Εξ.

Δυναμοσειρες

$$(E_2): \; a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x) \begin{cases} \to 0 \\ \to \neq 0 \end{cases}$$

Μηπως η λυση δινεται με τη μορφη καποιας δυναμοσειρας; Δηλ. ειναι στη μορφη $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

ακολουθια αριθμων $(a_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$
φτιαχνω τωρα μια σειρα προσθετοντας αριθμους
$S_\kappa = \sum_{n=0}^{\kappa} a_n$ μπορει να συγκλινει, ναι μη συγκλινει, να ταλαντωνεται

$\sum_{n=0}^{\kappa} a_n x^n$ τοτε εξαρταται απο τη μεταβλητη η οποια ειναι δυναμη

Στη γενικη περιπτωση εχω $\sum_{n=0}^{\kappa} a_n (x-x_0)^n$ μερικο αθροισμα

οταν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ τοτε συνηθως συγκλινει σε εναν πραγματικο αριθμο

γνωριζω οτι: $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$

$$\lim_{n\to\infty} [1 + x + x^2 + \dots + x^n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

αρα $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} = f(x)$ δυναμοσειρα γυρω απο το 0

συγκλινει για $|x|<1$

Υποθέτω ότι $\exists R : |x - x_0| < R$

Υπάρχει τύπος που λέει ότι $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

$R = 0$ δεν έχει θετική ακτίνα σύγκλισης

$R > 0$ τότε ακτίνα σύγκλισης θετική

Συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Γεωμετρική

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ακτίνα σύγκλισης} \\ \text{παραγώγιση όρο προς όρο} \\ \text{γνωστές δυναμοσειρές τύποι} \end{array} \right\}$

- $\kappa \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa a_n + \lambda b_n)(x-x_0)^n$

Δύσκολο να πολλ/σω και διαιρέσω όρο προς όρο δυναμοσειρές
Πρόσθεση, αφαίρεση υπάρχει γραμμικότητα